数理解析研究所講究録
268巻 1976年 1-9

HOMEOMORPHISMS OF LARGE SEIFERT MANIFOLDS

関西学院大学 理　　浅野孝平

Pをpolyhedronとし、Pの自己同相写像の全体がつくる群の、isotopic to identity な自己同相写像の全体のつくる部分群による剰余群を、Pの homeotopy group $\Lambda(P)$と呼ぶ。ここでは、3-manifold の homeotopy group について考える。3-manifold の homeotopy group については、次の問題に関連して興味がある。

1. 3次元球面の中の knot は、その complementary によって type が決定されるか。

2. Smith Conjecture。

3. knot group の automorphism group を決定する。

sufficiently large な、(すなわち incompressible な orientable surface をふくむ)、irreducible な 3-manifold の homeotopy group については、Waldhausen の基本的な結果[2]が知られている。しかし、実際に、homeotopy group を決定するこ

一般には.
とは、非常にむずかしい。ここでは、[1][2]の結果を利用して、sufficiently large な Seifert fiberspace についての結果を述べる。

準備　次のようにして、構成された 3-manifold を Seifert fiber space (あるいは、Seifert manifold) $\{b;(\epsilon,g);(\alpha_1,\beta_1),\cdots(\alpha_r,\beta_r)\}$ と呼ぶ。但し、$\epsilon=o_1, o_2, n_1, n_2, n_3, n_4$.　$b\in\mathbb{Z}$ if $\epsilon=o_1, n_2$　$b\in\mathbb{Z}_2$ if $\epsilon=o_2, n_1, n_3, n_4$.　(α_i,β_i) relatively prime integers with $\alpha_i>\beta_i>0$.

1. genus g で $r+1$ 個の boundary を持つ surface (orientable or nonorientable) の上の S^1-bundle を考える。このとき必ず、cross-section が存在する。この cross-section の boundary を a_i と名づける。$(i=1,2,\cdots,r)$

2. a_i の上の S^1-bundle は torus である。これを T_i とおくことにする。T_i の上の fiber の1つを b_i とおくと、(a_i,b_i) は、$H_1(T_i)\cong\pi_1(T_i)$ の generating system をなす。

3. 各 T_i $(i\neq 0)$ に対して meridian disk が $\alpha_i a_i+\beta_i b_i$ に homologous となるように、solid torus V_i をはりつける。V_i の中には、T_i の fibering を拡張しておく。(このとき V_i の center line は普通の意味では fiber ではない。これを

exceptional fiber と呼ぶ。) T_0 には. meridian disk が a_0+bb_0 となるように. solid torus V_0 をはりつける。

4. boundary のある Seifert fiber space は. boundary のない Seifert fiber space から. fiber にそった solid torus をのぞいたものと考えればよい。

最初に. Waldhausen の結果をまとめておく。以下 orientable case すなわち. type O_1 および n_2 の Seifert fiber space に制限しておく。

次の List にふくまれていない Seifert manifold を "large" Seifert manifold と呼ぶ。

$\partial M \neq \phi$ のとき。

(1). $S^1 \times S^1 \times I$, I; interval.

(2) base space が disk で 2つの exceptional fiber type $(2, 1)$ を持つ。

(3). Möbius band の上の fiber space.

$\partial M = \phi$ のとき

(1) $\epsilon = O_1$, $g = 0$, $r \leqq 3$

(2) $\epsilon = n_2$, $g = 1$, $r \leqq 1$

(3) $S^1 \times S^1 \times S^1$

(4) $\{0; (n_2, 2)\}$

(5) $\{-2; (o_1, 0); (2,1), (2,1), (2,1), (2,1)\}$

(6) $\{-1; (n_2, 1); (2,1), (2,1)\}$

"large" な Seifert fiber space は、sufficiently large である。[1] or [3]。

Waldhausen は large な Seifert manifold について次の定理を証明している。

<u>Theorem</u>　M, N を large Seifert manifold とする。$\varphi: M \to N$ を homeomorphism とするならば、φ と isotopic な fiber preserving homeomorphism が存在する。

さらに、[1] で、isotopic to identity な fiber preserving homeomorphism は、fiber preserving isotopy によって isotopic to identity であることを注意している。ここでは、以上の2つの結果を使って考える。

$\Lambda(B, \{z_* \cdots z_*\} \cdots\cdots \{z_* \cdots z_*\})$, $z_i \in B$ を B の { } 内の点が set wise に fix されるような homeomorphism の全体の、{ }内の点を set wise に fix した B の isotopy によって isotopic to identity な homeomorphism の全体による剰余群とする。

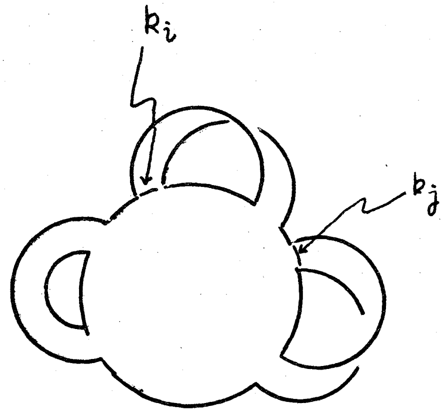
type (α_i, β_j) の exceptional fiber に genus g の surface B の点 z_i を対応させて、もし $(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_j, \beta_j)$ ならば、z_i と z_j を1つの{ }内

にいれ、もし boundary のある Seifert fiber space のときは、boundary の各 component に $z_i \in B$ を対応させ 1つの{ }にくくる。このようにしてつくった $\Lambda(B, \{z_* \cdots\}\cdots\{\cdots z_*\})$ を $\mathcal{A}$ と書くことにする。すると、large な Seifert manifold M に対して、$\pi : \Lambda(M) \longrightarrow \mathcal{A}$ という homomorphism が存在する。

<u>Lemma 1.</u> 次のような homomorphism Φ が存在する。 $\pi\Phi = \text{identity}$.

証明. $\mathcal{A}$ の element は $\Lambda(B')$ の element と一対一対応している。但し、B' は genus g の surface から $r+1+$ {boundary の個数}個の disk の interior をのぞいた surface。$\epsilon = o_1$ のとき、M' を M から exceptional fiber の neighbourhood をのぞいた manifold とすると、$M' \approx B' \times S^1$ である。B' の homeomorphism は $B' \times S^1$ の homeomorphism に拡張できるので、この拡張された homeomorphism が、さらに、各 V_i に拡張できることを示せば、十分である。a_i は、$\pm a_j$ に写され b_i は $\pm b_j$ に写されるのであるから、V_i の meridian curve は V_j の meridian curve に写される。故に、V_i から V_j の homeomorphism に拡張可能である。

$\epsilon = n_2$ のとき。 M'をB'の上のS^1-bundleと考えて、$p^{-1}(k_i)$を、A_iとおく。$(i=1,2,\cdots,g)$.
但し、pは、M'をS^1-bundleと考えたときのbundle projection.
k_iは図のような、B'上のproper arcとする。$\tau(M'-\bigcup U(A_i))$は、product bundleであるので、



$\tau(B'-\bigcup U(k_i))$のhomeomorphismは、$\tau(M'-\bigcup U(A_i))$に拡張可能である。そして、M'がorientableであることを使えば、M'に拡張できることを証明できる。■

したがって、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\pi \longrightarrow \Lambda(M) \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

は、splitする。目標は、$\Lambda(M)$と$\mathcal{H}$の関係を明らかにすることであるから、$\mathrm{Ker}\,\pi$を計算すれば良い。

<u>Lemma 2.</u> $p: N \longrightarrow S$ をsurface Sの上の、S^1-bundleとする。このとき、Sのisotopy $\{i_t ; 0\leq t\leq 1\}$と、$i_0 p = pF$であるNのautohomeomorphism Fが存在すると仮定する。このとき、Nのisotopy $\{I_t ; 0\leq t\leq 1\}$で、$i_t p = pI_t$、$I_0 = F$となるものが存在する。

上のlemmaは、trivialである。このことにより、KerΠは各fiberが自分自身にmapするhomeomorphismを考えれば良いことになる。

<u>Lemma 3.</u>　fを、Mのfiber preserving homeoでfのisotopy class $[f]$が、KerΠにふくまれているとする。そして、さらに $f(B')=B'$ とするならば、fはisotopic to identityである。

これは、Mを$\cup T_j$およびB'でcutすることにより、証明できる。このlemmaによって、KerΠは、M'のcross-section B'のembeddingを分類すればよい。まず、cross-sectionのboundaryを考える。

<u>Lemma 4.</u>　fをMのfiber preserving homeomorphismで $[f]\in$ KerΠで、しかも各fiberは、自分自身にmapしているとする。

$\partial M=\phi$のとき、$M=\{b;(\epsilon,g);(2,1)\cdots(2,1)\}, r=2b$ とすれば、

1). $f(a_i)\sim\epsilon a_i$, $f(b_i)\sim\epsilon b_i$

2). $f(a_i)\sim\epsilon(a_i+b_i)$, $f(b_i)\sim-\epsilon b_i$

ここで、$\epsilon = \pm 1$, $\sim$ は homologous on T_i を示す。

$\partial M \neq \phi$ で、exceptional fiber がすべて type$(2,1)$ のときも、上と同じ。

上以外の Seifert manifold に対しては、$f_i(a_i) \sim \epsilon a_i$ $f(b_i) \sim \epsilon b_i$。

証明は略する。ここで、orientation preserving homeo. であれば、cross-section の boundary は、固定されているので、次のような exact sequence を考える。$\Lambda^+(M)$を、{Mの orientation preserving homeo. の全体}／{isotopic to identity な homeo. の全体} とすれば、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\pi^+ \longrightarrow \Lambda^+(M) \xrightarrow{\pi^+} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

は split する。そして、上の lemma により $\Lambda^+(M)$ を決定すれば $\Lambda(M)$ がわかる。そして、

<u>Theorem</u> $\quad \mathrm{Ker}\,\pi^+ \cong H_1(B)$

という結果を得る。さらに $\mathcal{H}$ より $\mathrm{Ker}\,\pi^+$ の automorphism group への homomorphism は、

$$\mathcal{H} \longrightarrow \Lambda(B) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, H_1(B)$$

という自然な homomorphism の合成である。

Example torus knot の complement $T_{p,q}$

$\mathcal{H} \cong \mathbb{Z}_2$, $\mathrm{Ker}\,\pi^+ \cong H_1(B) \cong 0$

$\Lambda^+(T_{p,q}) \cong \Lambda(T_{p,q}) \cong \mathbb{Z}_2$

文献

(1) F. Waldhausen, "Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I," Invent. Math.3 (1967), 308 - 333; II, Invent. Math. 4 (1967), 87 - 117.

(2) F. Waldhausen, "On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large," Ann. Math. 87 (1968), 56 - 88.

(3) P. Orlik, "Seifert Manifolds," Lecture Notes in Math. 291, Springer-Verlag, (1972).